ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ’ ΓΕΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

11:35

φροντιστήρια πουκαμισάς

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	4/6/2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ’ ΓΕΛ**

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α.2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 155

Α.3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α.4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$D_g=[1,+\infty)$ και $D_h=[1,+\infty)$

$D_{g\cap h}=D_g\cap D_h=[1,+\infty)\bigcap[1,+\infty)=[1,+\infty)$

Για την συνάρτηση $f=\dfrac{g}{h}$.

$$h(x)\neq 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\neq 0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}}\neq 0\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}}\neq 0\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$$

$$D_f=D_{\frac{g}{h}}=\left\{x\in D_{g\cap h}:h(x)\neq 0\right\}=\left\{x\in[1,+\infty):x\neq 1\right\}=(1,+\infty)$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}}}=\frac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)}=\frac{x+1}{x-1},\ \ x>1$$

Για την συνάρτηση $r = g \cdot h$.

$D_r = D_{g\cdot h} = \{x \in D_{g\cap h}\} = \{x \in [1,+\infty)\} = [1,+\infty)$

$r(x) = g(x)\cdot h(x) = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x},\ x \geq 1$

B.2. Έχουμε $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D_f = (1,+\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $D_f = (1,+\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (1,+\infty)$ άρα f 1-1 άρα αντιστρέφεται

Έχουμε λοιπόν

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1} \overset{x=f^{-1}(y)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \overset{y\to x}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} \\ &x \in \mathrm{A}_f \text{ άρα } x > 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}_{f^{-1}} = (1,+\infty)$

Β' τρόπος για σύνολο τιμών

Αφού f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (1,+\infty)$ ισχύει:

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1)\frac{1}{x-1} = 2(+\infty) = +\infty$$

Διότι $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0$ $\quad και \quad x-1>0 \quad κοντά \quad στο\ 1^+$ άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Τελικά $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ με $D_{f^{-1}}=f(D_f)=(1,+\infty)$.

Άρα $f=f^{-1}$.

B.3. Έχουμε $r(x)=x-\dfrac{1}{x}$ $D_r=[1,+\infty)$

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει διότι είναι συνεχής στο $D_r=[1,+\infty)$

Πλάγια ασύμπτωτη της C_r καθώς $x\to+\infty$

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x^2}=1-0=1$$

$$\kappa=\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης r στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1\cdot x+0\Leftrightarrow y=x$

Β' τρόπος

$$r(x)=x-\frac{1}{x}\Leftrightarrow r(x)-x=-\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=0$$

Άρα από ορισμό η ευθεία $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης r στο $+\infty$.

B.4. $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in A_f=(1,+\infty)$ άρα η εξίσωση γίνεται $(\mathrm{E})\ \left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4\cdot r(x)$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4\cdot r(x)\ \Leftrightarrow\ x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}x^3=x+4x^2-x\cdot\frac{4}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow(x-4)\left(x^2-1\right)=0$$

Άρα $(x-4)\left(x^2-1\right)=0\left\langle\begin{array}{l}x-4=0\Leftrightarrow x=4\\ \quad ή\\ x^2-1=0\Leftrightarrow x=1\ \text{ή}\ x=-1\end{array}\right.$

Η λύση $x=4$ είναι δεκτή ενώ οι λύσεις $x=1$ και $x=-1$ απορρίπτονται αφού $x\in(1,+\infty)$.