

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:30



φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΣΑΣ

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 111

A₂. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 104

A₃. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 128

A₄. α) 1 β) 1 γ) 1 δ) 2 ε) 2

ΘΕΜΑ Β

$$g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \ln x \quad D_h = (0, +\infty)$$

$$B_1. D_f = D_{g \circ h} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = (0, +\infty)$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, \quad x > 0$$

Άρα $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, \quad x > 0$



$$B_2. \text{ i) } f'(x) = \left(\frac{4-x^2}{x} \right)' = \frac{-2x \cdot x - (4-x^2) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{x^2} < 0 \text{ στο } (0, +\infty)$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\text{ii) } \frac{4-n^2}{4-e^2} > \frac{n}{e} \quad \left(\begin{array}{l} 4-n^2 < 0 \\ 4-e^2 < 0 \end{array} \right) \Rightarrow \frac{4-n^2}{n} < \frac{4-e^2}{e} \Rightarrow f(n) < f(e)$$

$f \downarrow$
 $\Rightarrow n > e$ που ισχύει

$B_3.$ Η f είναι συνεχής στο $D_f = (0, +\infty)$ ως ρητή
κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(4-x^2) \frac{1}{x} \right] = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) = 4 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad x > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Επομένως η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+4}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Επομένως η ω ^{εία} $y = -x$ είναι πλάγια ασυμπτωτή της C_f στο $+\infty$

$$B_4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\upsilon(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\upsilon(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}}$$

$$\left| \frac{\sigma\upsilon\upsilon(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\upsilon(1+x^2)|}{\left| \frac{4-x^2}{x} \right|} \leq \frac{1}{\left| \frac{4-x^2}{x} \right|} = \frac{x}{-4+x^2} \quad \text{αφού } x \rightarrow +\infty$$

$$-\frac{x}{-4+x^2} \leq \frac{\sigma\upsilon\upsilon(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{x}{-4+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\upsilon(1+x^2)}{f(x)} = 0$