



**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία σχολικό σελ.335

**A2.** Θεωρία σχολικό σελ.246

**A3.** Θεωρία σχολικό σελ.222

**A4. α.** Λάθος

**β.** Σωστό

**γ.** Σωστό

**δ.** Λάθος

**ε.** Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**

$$(z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow (|z-2|-1)(|z-2|+2)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z-2|=1$  ή  $|z-2|=-2$  (Απορρίπτεται). Άρα  $|z-2|=1$ , οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,0)$  και ακτίνας  $\rho=1$ .

Ισχύει:  $|z|=|z-2+2|\leq|z-2|+2=3$

**B2.**

Επειδή  $z_1, z_2$  ρίζες της εξίσωσης  $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$  ισχύει:

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow x_1 + y_1i = x_2 - y_2i \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = -y_2$$

$$\text{Όμως } |\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - y_2| = 2 \stackrel{y_1 = -y_2}{\Leftrightarrow} |2y_1| = 2 \Leftrightarrow y_1 = \pm 1$$

$$\text{Όμως } |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - 2)^2 + y_1^2} = 1 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + y_1^2 = 1 \stackrel{y_1 = \pm 1}{\Leftrightarrow} (x_1 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$\text{Άρα } z_1 = 2 + i \text{ και } z_2 = 2 - i$$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{1} \Leftrightarrow 5 = \gamma$$

**B3.** Έστω  $|v| \geq 4$ . Έχουμε  $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$ . Άρα

$$|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|. \text{ Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι}$$

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0|$$

Από B1 είναι  $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$ , άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1). \text{ Η τελευταία γράφεται}$$

$$|v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \text{ (είναι } |v| - 1 > 0 \text{ εφόσον } |v| \geq 4) \Leftrightarrow |v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3. \text{ Όμως } 4|v|^3 - 3 < 4|v|^3. \text{ Άρα } |v|^4 \leq 4|v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4 \text{ που είναι άτοπο. Άρα } |v| < 4$$

**ΘΕΜΑ Γ****Γ1.**

$$2(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow ((f(x) + x)^2)' = (x^2)' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Από συνέπειες}$$

Θ.Μ.Τ ισχύει  $(f(x) + x)^2 = x^2 + c$ . Για  $x = 0$  τότε  $f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$ . Άρα

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + 1 \quad (1)$$

Θεωρώ  $h(x) = f(x) + x$  η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα συνεχών. Άρα  $h^2(x) = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως,  $h(0) = f(0) = 1 > 0 \Rightarrow h(x) > 0$ . Από τη σχέση (1) ισχύει

$$h^2(x) = x^2 + 1 \stackrel{h(x)>0}{\Rightarrow} h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

**Γ2.** Θα αποδείξω ότι:  $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Αν  $x \leq 0$ , προφανώς  $f(x) > 0$
- Αν  $x > 0$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$  που ισχύει. Άρα  $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Για το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$  ισχύει:

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0.$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  οπότε και 1-1. Ισχύει:

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \stackrel{f_{-1}}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1. \text{ Το πρόσημο της } g' \text{ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f(x)		↗	↘	↗

$$g((-\infty, -1]) \stackrel{g \nearrow}{=} (\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1)] = (-\infty, -\frac{1}{2}]. \text{ Άρα η } g(x) = 0 \text{ δεν έχει ρίζα στο } (-\infty, 1].$$

$$g((-1, 0)) \stackrel{g \searrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)) = (-1, -\frac{1}{2}). \text{ Άρα } g(x) = 0 \text{ δεν έχει ρίζα στο } (-1, 0)$$

$$g([0, +\infty)) \stackrel{g \nearrow}{=} [g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [-1, +\infty). \text{ Επειδή η τιμή } 0 \in g([0, +\infty)) \text{ η } g(x) = 0 \text{ έχει ακριβώς μια ρίζα στο } [0, +\infty) \text{ καθώς η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

**Γ3.** Θεωρώ συνάρτηση  $\varphi(x) = \int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $0, x - \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$ . Άρα η συνάρτηση  $\int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt$  είναι

παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Η συνάρτηση  $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών άρα  $\varphi(x)$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επομένως η συνάρτηση  $\varphi$  είναι

- συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- $\varphi(0) = \int_{-\pi/4}^0 f(t)dt > 0$  διότι  $f(t) > 0$
- $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) = -1 < 0$  διότι  $f(t) > 0$

Άρα  $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ . Επομένως από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ τέτοιο ώστε } \varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\pi/4}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0.$$

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = \ell_1 - \ell_2 = 6f'(1) \quad [\text{σχέση (1)}] \end{aligned}$$

για το  $\ell_1$  θέτω  $u=5h$ . Αν  $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0$

$$\ell_1 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{\frac{u}{5}} = 5 \cdot f'(1)$$

για το  $\ell_2$  θέτω  $t=-h$ . Αν  $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$\ell_2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -f'(1)$$

Άρα  $f'(1) = 0$ .

για κάθε  $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για κάθε  $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>+∞</b>
<b>f'</b>		-	+
<b>f</b>		↘	↗

**min=f(1)**

**Δ2.**

Η συνάρτηση  $h(t) = \frac{f(t)-1}{t-1}$  είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η  $f(t)$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη) στο  $(1, +\infty)$  και  $a \in (1, +\infty)$ . Άρα η  $g$  είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0 \text{ επειδή για κάθε } x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow f(x)-1 > 0 \text{ και } x-1 > 0. \text{ Άρα } g \uparrow$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_{x+5}^{x+6} g(u) du = -\int_{\alpha}^{x+5} g(u) du + \int_{\alpha}^{x+6} g(u) du \text{ με } x > 1$$

η  $h$  είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων γιατί η  $g(u)$  συνεχής στο  $(1, +\infty)$  και  $a \in (1, +\infty)$ ,  $x+6, x+5 \in (1, +\infty)$

Άρα οι συναρτήσεις  $\int_{\alpha}^{x+5} g(u) du, \int_{\alpha}^{x+6} g(u) du$  είναι παραγωγίσιμες.

$$h'(x) = g(x+6)(x+6)' - g(x+5)(x+5)' = g(x+6) - g(x+5) > 0 \text{ γιατί}$$

η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$  και  $x+6 > x+5$  άρα  $g(x+6) > g(x+5)$ . Οπότε η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύει:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow h(8x^2) > h(2x^4) \Leftrightarrow 8x^2 > 2x^4 \Leftrightarrow 4x^2 > x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Όμως  $x > 1$ . Άρα  $1 < x < 2$ .

**Δ3.** Ισχύει  $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$ ,  $x \in (1, +\infty)$  και  $a > 1$

η  $g$  είναι παραγωγίσιμη από Δ2 ερώτημα με  $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$

η  $g'$  είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2} \quad (1)$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την  $f$  στο  $[1, x]$ ,  $x > 1$ .

η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, x] \subseteq (0, +\infty)$ . Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, x)$

ώστε να ισχύει  $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1}$  (2) για το  $\xi$  ισχύει  $1 < \xi < x$  και η  $f'$  είναι

γνησίως αύξουσα.

Άρα

$$f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{f(x)-1}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-1) - (f(x)-1) > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g''(x) > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο με  $x_0=a$  είναι

$$\varepsilon: y-g(a)=g'(a)(x-a)$$

$$\text{όμως } g(a) = \int_a^a \frac{f(t)-1}{t-1} dt = 0 \text{ και } g'(a) = \frac{f(a)-1}{a-1}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y = \frac{f(a)-1}{a-1} \cdot (x-a)$$

όμως η g είναι κυρτή οπότε ισχύει:

$$g(x) \geq \frac{f(a)-1}{a-1} \cdot (x-a) \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x=a. \text{ Άρα η}$$

$$\text{εξίσωση } g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1} \cdot (x-a) \text{ έχει ακριβώς μία λύση τη } x=a.$$

$$\text{Όμως } \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = \frac{f(a)-1}{a-1} (x-a)$$

$$(a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(a)-1)(x-a)$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση.